Matematică informatică
Varianta 89

Subiectul I.

a) $A_2B_2 = 2\sqrt{2}$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $3x + y - 1 = 0$.

d) Aria triunghiului $A_1A_4B_4$ este $S = 6$.

e) $\sin\left(A_1\hat{A}_2B_2\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) 18.

Subiectul II.

1.

a) $a + b = 8$.

b $c = 3$.

c) Ecuația are o singură soluție.

d) Există 18 funcții ca în enunț, cu $f(3)$ impar.

e) Există 12 echipe ca în enunț.

2.

a) $f'(x) = -\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{x^6}$, $\forall\, x > 0$.

b) Dreapta $Oy : x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției iar dreapta $Ox : y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției.

c) $f'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt{5}\right)$.

e) $\int_1^2 f(x)\,dx = \dfrac{61}{192}$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Considerăm $z, w \in \mathbf{C}$, astfel încât $|z|^2 + |w|^2 = 0$. Deoarece $|z|, |w| \in [0, \infty)$, egalitatea precedentă implică $|z| = |w| = 0$, deci $z = w = 0$.

c) Calcul direct.

d) Dacă $D = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in G$, $D \neq O_2$, atunci rezultă $\det(D) = |z|^2 + |w|^2 \neq 0$, şi $D^{-1}=\frac{1}{|z|^2+|w|^2}\cdot\begin{pmatrix}\overline{z} & -w\\ -(-\overline{w}) & \overline{\overline{z}}\end{pmatrix}\in G$.

e) De exemplu, $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ are proprietatea cerută..

f) Considerăm $A, B\in G$ astfel încât $A\cdot B=O_2$.

Dacă A este inversabilă, înmulțind la stânga egalitatea precedentă cu A^{-1} obținem $B=O_2$. Dacă $\det(A)=0$, din **b)** rezultă că $A=O_2$.

g) Din **b)** obținem că G este stabilă față de operația de înmulțire uzuală a matricelor, iar din **e)** că înmulțirea nu este comutativă pe D.

Se verifică uşor axiomele corpului şi rezultă că $(G,+,\cdot)$ este un corp necomutativ.

Subiectul IV.

a) $a_2-b_2=0$.

b) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)+b_n-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=b_n,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

c) $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$, deci şirul $(b_n)_{n\geq1}$ este strict crescător.

d) Evident.

e) Se arată prin calcul direct, folosind punctul **d)**.

f) Avem $0<\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,dx<\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{2n+1}$ şi obținem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,dx=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx-\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,dx\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2$.

g) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, notăm $\alpha_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Şirul $(\alpha_n)_{n\geq1}$ este strict crescător, deci are limită în $\overline{\mathbf{R}}$.

Presupunem că $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha\in\mathbf{R}$. Atunci, avem $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha_{2n}-\alpha_n)=0$

Însă, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\overset{\text{f)}}{=}\ln 2$, contradicție. Aşadar $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty$.